Chapitre 22

Polynômes (partie C) et fractions rationnelles

Plan du chapitre

1 Décomposition en produit de facteurs irréductibles . . . **1**
- 1.1 Polynômes irréductibles . . . 1
- 1.2 Décomposition des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ . . . 3
- 1.3 Décomposition des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ . . . 5
- 1.4 Décomposition, PGCD, PPCM. . . . 7

2 Polynômes d'interpolation de Lagrange . . . **8**

3 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles . . . **9**
- 3.1 Construction de $\mathbb{K}(X)$. . . . 9
- 3.2 Le corps $\mathbb{K}(X)$ . . . 10
- 3.3 Fractions irréductibles et degré . . . 11

4 Fonctions rationnelles . . . **12**

5 Décomposition en éléments simples (DES) . . . **13**
- 5.1 Début de la méthode ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) . . . 13
- 5.2 Fin de la méthode sur $\mathbb{C}$ . . . 14
- 5.3 Fin de la méthode sur $\mathbb{R}$ . . . 15
- 5.4 Le déroulé de chaque étape. . . . 17

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

1.1 Polynômes irréductibles

Définition 22.1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est irréductible sur $\mathbb{K}$ si

- $\deg P \geqslant 1$ et...
- ... les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont :
  - les polynômes constants (de degré 0),
  - les polynômes de même degré que P (donc associés à P, i.e. de la forme λP, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$).

Cette notion dépend du corps $\mathbb{K}$ qu'on considère : un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ ne l'est pas forcément sur $\mathbb{C}$. Cette définition est peu utilisée en pratique : on verra plus loin comment reconnaitre un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Propriété 22.2

1. Tout polynôme de degré 1 est irréductible sur $\mathbb{K}$.
2. Si $\deg P \geq 2$ et que P admet une racine dans $\mathbb{K}$, alors P n'est pas irréductible sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur de P : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$. De plus $A \neq 0$ car $P \neq 0$. Ainsi,
$$0 \leq \deg A \leq \deg P = 1$$
Ainsi, les seuls diviseurs de P sont les polynômes de degré 0 ou du même degré que P. D'où P est irréductible sur $\mathbb{K}$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P, alors $X - \alpha \mid P$. Ainsi $X - \alpha$ est un diviseur de P dont le degré n'est ni 0, ni $\deg P$ (car $\deg P \geq 2$). Donc P n'est pas irréductible sur $\mathbb{K}$.

$\square$

Exemple 1. Les polynômes suivants sont-ils irréductibles sur $\mathbb{K}$?

$$P = X^3 - X^2 + X - 1 \qquad Q = X^2 + 1$$

On peut noter que le polynôme P s'écrit comme produit de polynômes irréductibles :

- $P = (X-1)(X^2+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$,
- $P = (X-1)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Il en sera de même pour tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$:

Remarque. Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ jouent un rôle similaire aux nombres premiers dans $\mathbb{N}$. De même que tout nombre entier se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers, on va montrer que **tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ peut se décomposer comme un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}$.**

1.2 Décomposition des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 22.3 (Théorème de d'Alembert-Gauss (admis))

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Théorème 22.4

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, càd pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, en notant $n = \deg P \in \mathbb{N}$, on a

$$\exists \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K} \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \qquad P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \beta_k)$$

Les $\beta_1, \cdots, \beta_n$ ci-dessus ne sont pas nécessairement distincts, et on peut avoir $n = 0$ (auquel cas $P = \lambda$ est constant non nul).

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le degré. Pour montrer la propriété pour tout polynôme non nul, il suffit de montrer qu'elle est vraie pour tout polynôme de degré n avec $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose donc

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« Tout polynôme de degré n est scindé sur } \mathbb{C} \text{ »}$$

- **Initialisation :** soit P un polynôme de degré $n = 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P = \lambda$. Ainsi, comme le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} (\cdots)$ donne 1, P est de la forme voulue. D'où $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n+1$.

  D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, comme $\deg P \geq 1$, P admet une racine $\beta \in \mathbb{C}$. Donc $X - \beta$ divise P : il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \beta)Q$.

  On montre alors facilement que $\deg Q = \deg P - 1 = n$. Par hypothèse de récurrence, Q est scindé sur $\mathbb{C}$: il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$ tels que $Q = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \beta_k)$.

  Ainsi $P = \lambda (X - \beta) \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \beta_k)$. D'où P s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1, donc P est scindé. Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

□

Corollaire 22.5 (Polynômes irréductibles et décomposition sur $\mathbb{C}[X]$)

1. Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont (exactement) les polynômes de degré 1.
2. Tout polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$ peut se décomposer en produit de polynômes irréductibles (donc de degré 1) sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

   avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ les racines deux à deux distinctes de P, et $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.

Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Lorsque P est décomposé, on peut "lire" ses racines et leurs multiplicités (si $r = 0$, P est constant non nul).

Démonstration.

1. On a vu précédemment que tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. De plus, tout polynôme de degré supérieur ou égal à 2 est scindé sur $\mathbb{C}$, donc admet une racine et par conséquent n'est pas irréductible sur $\mathbb{C}$ (propriété 22.2).
2. (Preuve "intuitive") Comme $P \neq 0$ et P est scindé : on peut écrire P sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \beta_i)$$

   avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{C}$. On note $r \in \mathbb{N}$ le nombre de racines distinctes de P et on les appelle $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. Alors chaque β_i est égal à un unique α_k. Si on appelle m_k le nombre de β_i égal à α_k, on peut réécrire

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

□

Exemple 2. Factoriser le polynôme $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1.3 Décomposition des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$

Propriété 22.6

Soit P un polynôme à coefficients réels. Si α est une racine complexe de $\mathbb{C}$, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P, de même multiplicité que α.

Démonstration. Tout d'abord, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $Q(\overline{\alpha}) = \overline{Q(\alpha)}$. En effet, si $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\overline{Q(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\overline{\alpha}^k = Q(\overline{\alpha})$$

En conséquence, comme P et ses dérivées successives sont à coefficients réels, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m \quad &\iff \quad P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \\
&\iff \quad \overline{P(\alpha)} = \overline{P'(\alpha)} = \ldots = \overline{P^{(m-1)}(\alpha)} = 0 \text{ et } \overline{P^{(m)}(\alpha)} \neq 0 \\
&\iff \quad P(\overline{\alpha}) = P'(\overline{\alpha}) = \ldots = P^{(m-1)}(\overline{\alpha}) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\overline{\alpha}) \neq 0 \\
&\iff \quad \overline{\alpha} \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité } m.
\end{aligned}$$

□

Théorème 22.7 (Polynômes irréductibles et factorisation sur $\mathbb{R}[X]$)

1. Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont (exactement) les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.
2. Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ se factorise en produit de polynômes irréductibles sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} Q_j^{n_j}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ et :

- $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles de P, deux à deux distinctes,
- $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives,
- $Q_1, \cdots, Q_s \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes unitaires distincts de degré 2 à discriminant strictement négatif.
- $n_1, \cdots, n_s \in \mathbb{N}^*$ jouent le rôle de “multiplicités” des $Q_1, \cdots, Q_s$

Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Dans la factorisation ci-dessus, on peut avoir $r = 0$ ou $s = 0$ (dans ce cas le produit correspondant vaut 1 car on somme sur le vide). Si $r = s = 0$, alors P est constant non nul. De plus, comme tous les polynômes dans les produits sont unitaires, λ est le coefficient dominant de P.

On peut obtenir la décomposition de P sur $\mathbb{C}$ en décomposant chaque Q_j comme $(X - \gamma_j)(X - \overline{\gamma_j})$, avec $\gamma_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. L'entier p_j correspond alors à la multiplicité de γ_j et de $\overline{\gamma_j}$ dans cette décomposition.

Comme sur $\mathbb{C}$, on peut lire les racines réelles de P sur sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. Les Q_j n'ont pas de racine réelle donc il suffit de regarder le premier produit.

Démonstration. On ne montre que la deuxième assertion. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note :

- λ le coefficient dominant de P.
- $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines réelles de P (deux à deux distinctes).
- $m_1, \cdots, m_r$ les multiplicités respectives de $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$.
- $\gamma_1, \overline{\gamma_1}, \cdots, \gamma_s, \overline{\gamma_s}$ les racines complexes non réelles de P (deux à deux distinctes).
- $n_1, \cdots, n_s$ les multiplicités respectives de $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ (ce sont aussi les multiplicités de $\overline{\gamma_1}, \cdots, \overline{\gamma_s}$).

D'après la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, on a

$$\begin{aligned} P &= \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} (X - \gamma_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{s} (X - \overline{\gamma_j})^{n_j} \\ &= \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} \left[(X - \gamma_j)(X - \overline{\gamma_j}) \right]^{n_j} \end{aligned}$$

Or, pour tout $j \in [\![1, s]\!]$,

$$(X - \gamma_j)(X - \overline{\gamma_j}) = X^2 - (\gamma_j + \overline{\gamma_j})X + \gamma_j \overline{\gamma_j} = X^2 - 2\mathrm{Re}(\gamma_j)X + \left|\gamma_j\right|^2$$

ce qui donne un polynôme à coefficients réels, unitaire, de discriminant strictement négatif. D'où en posant $Q_j = X^2 - 2\mathrm{Re}(\gamma_j)X + \left|\gamma_j\right|^2$, on obtient la décomposition annoncée. □

Méthode

Pour factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}$, on peut factoriser sur $\mathbb{C}$, puis regrouper les termes contenant des racines complexes conjuguées.

Exemple 3. Décomposer $X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme le montre cet exemple, un polynôme réel qui n'a pas de racines réelle n'est pas nécessairement irréductible.

1.4 Décomposition, PGCD, PPCM

Pour les entiers, on a vu la décomposition généralisée de deux entiers selon une famille de nombres premiers qui contient tous les facteurs premiers de leur décomposition. On peut faire de même pour les polynômes :

Définition 22.8 (Décomposition généralisée)

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul. Soit $(P_1, \cdots, P_r)$ une famille de polynômes irréductibles distincts sur $\mathbb{K}$ qui contient tous les polynômes irréductibles qui interviennent dans la décomposition de A. Alors on peut écrire :

$$A = \lambda P_1^{m_1} P_2^{m_2} \cdots P_r^{m_r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}$ (notamment les exposants peuvent être nuls).

On parlera de "décomposition généralisée" de A.

Propriété 22.9

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls, de décompositions généralisées :

$$A = \lambda P_1^{m_1} P_2^{m_2} \cdots P_r^{m_r} \qquad B = \mu P_1^{n_1} P_2^{n_2} \cdots P_r^{n_r}$$

Alors, on peut déduire le PGCD et le PPCM de A et B :

$$A \wedge B = \prod_{k=1}^{r} P_k^{\min(m_k, n_k)} \qquad \text{et} \qquad A \vee B = \prod_{k=1}^{r} P_k^{\max(m_k, n_k)}$$

Exemple 4. Si $A = 2X^2(X-1)$ et $B = X(X-1)^2(X+1)$ alors

$$A \wedge B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad A \vee B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On en déduit le résultat suivant, qui est très utile en pratique :

Propriété 22.10

Si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, alors $P \wedge Q = 1$ si et seulement si P et Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. On montre la négation de cette équivalence, à savoir $P \wedge Q \neq 1$ si et seulement si P et Q ont une racine commune dans $\mathbb{C}$.
Sens réciproque : Si P et Q ont une racine commune dans $\mathbb{C}$, notée α, alors $X - \alpha \mid P$ et $X - \alpha \mid Q$. Donc $X - \alpha \mid P \wedge Q$. Ainsi $P \wedge Q \neq 1$.
Sens direct : si $P \wedge Q \neq 1$, comme $P \wedge Q$ est unitaire, on a $\deg(P \wedge Q) \neq 0$. D'où, comme $\deg(P \wedge Q) \geq 0$, on a $\deg(P \wedge Q) \geq 1$. On en déduit par le théorème de d'Alembert que $P \wedge Q$ admet une racine complexe α. D'où $X - \alpha \mid P \wedge Q$. D'où $X - \alpha \mid P$ et $X - \alpha \mid Q$. Ainsi, α est une racine commune à P et Q. □

Pour appliquer ce résultat, il faut absolument regarder s'il y a une racine *complexe* commune : $P = (X^2 + 1)$ et $Q = (X^2 + 1)^2$ n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{R}$, mais on voit facilement que P et Q ne sont pas premiers entre eux (car $P \mid Q$). C'est cohérent avec la propriété ci-dessus, puisque P et Q ont au moins une racine commune dans $\mathbb{C}$ (à savoir i et $-i$).

2 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires tous distincts. Pour cette partie, on pose

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad L_i(X) := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

Propriété 22.11

Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Démonstration. Si $j = i$, alors $L_i(x_i) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} 1 = 1$.

Si ($n \geq 2$ et) $j \neq i$, alors $L_i(x_j) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = \underbrace{\frac{x_j - x_j}{x_i - x_j}}_{=0} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i,\, k \neq j}} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = 0$. □

Propriété 22.12 (Polynôme de Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires tous distincts.
- Soit $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{K}$ des scalaires quelconques.

Alors il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dont la fonction polynômiale passe par les points $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$, càd tel que

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \qquad P(x_j) = y_j$$

Ce polynôme P est donné par :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k} \quad \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

P est appelé le <u>polynôme d'interpolation de Lagrange</u> associé aux points $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$.

Démonstration. **Existence :** Soit P le polynôme défini ci-dessus. Comme $L_1, \cdots, L_n \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, par somme (et multiplication par les scalaires $y_1, \cdots, y_n$), on a $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$P(x_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i \delta_{i,j} = y_j$$

Unicité : Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tels que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on a $P_1(x_j) = P_2(x_j) = y_j$. On a donc

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \qquad (P_1 - P_2)(x_j) = 0$$

Ainsi, le polynôme $P_1 - P_2$ admet donc n racines $x_1, \ldots, x_n$ et comme ce polynôme est de degré au plus $n-1$, il s'agit du polynôme nul : $P_1 - P_2 = 0$. Donc $P_1 = P_2$ et il y a unicité. □

Exemple 5. Le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les points $(1,2)$ et $(3,5)$ est dans $\mathbb{K}_1[X]$, donc de la forme $aX+b$. Il s'agit en fait de la droite affine qui passe par ces deux points.

Exemple 6. Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$. Déterminer un polynôme de degré au plus 2 qui passe par les trois points suivants :

$$(x_1,y_1) = (-1,a) \qquad (x_2,y_2) = (0,b) \qquad (x_3,y_3) = (1,c)$$

3 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

3.1 Construction de $\mathbb{K}(X)$

Étant donnés deux polynômes A et B avec $B \neq 0$, on souhaite définir le quotient $\dfrac{A}{B}$. Si A est un multiple de B, i.e. $A = BQ$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, on pourrait poser $\dfrac{A}{B} := Q$. Mais dans le cas général, A n'est pas un multiple de B et il n'y a pas de moyen clair de définir cette fraction dans $\mathbb{K}[X]$. Il faut un ensemble "plus gros", qu'on va construire.

Comme les fractions d'entiers, si on veut définir un quotient $F = \dfrac{A}{B}$, on souhaite pouvoir "simplifier" par un même polynôme (non nul) au numérateur et au dénominateur. Cela entraine qu'une même fraction admet plusieurs écritures sont possibles :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{2A}{2B} = \frac{XA}{XB} = \frac{BA}{B^2}$$

On ne demande donc qu'une chose sur les quantités $\dfrac{A}{B}$, c'est de vérifier la relation d'égalité $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$.

Définition 22.13 (Fraction rationnelle)

On admet l'existence d'un ensemble

$$\mathbb{K}(X) := \left\{ \frac{A}{B} \;\middle|\; A, B \in \mathbb{K}[X] \text{ et } B \neq 0 \right\}$$

dont les éléments vérifient

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$$

L'élément $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est appelé une fraction rationnelle.

Exemple 7.

- $\frac{X}{X^2}$ et $\frac{2}{2X}$ sont deux fractions rationnelles égales : ce sont deux écritures de la fraction $F = \frac{1}{X}$.
- $\frac{1}{4}$ et $\frac{0}{X}$ sont des fractions rationnelles.

Remarque. Pour tout polynôme P, on peut identifier P et $\frac{P}{1}$: on dira (abusivement) que tout polynôme est une fraction rationnelle, ou encore que $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

- En particulier, on note $0 = \frac{0}{1}$ la fraction rationnelle nulle. Elle a de nombreuses écritures : $0 = \frac{0}{X} = \frac{0}{5X^2}$...
- On a $\frac{A}{B} = 0$ si et seulement si $A = 0$.

3.2 Le corps $\mathbb{K}(X)$

Définition 22.14

On définit deux l.c.i. $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}(X)$:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} := \frac{AD + BC}{BD} \in \mathbb{K}(X)$$

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} := \frac{AC}{BD} \in \mathbb{K}(X)$$

- Puisque $B \neq 0$ et $D \neq 0$, alors $BD \neq 0$ (car $\mathbb{K}[X]$ est intègre). Les fractions ci-dessus sont donc bien des éléments de $\mathbb{K}(X)$.
- Si $F, F' \in \mathbb{K}(X)$, alors on peut vérifier que $F + F'$ et FF' ne dépendent pas des écritures de F et de F'. Les lois $+$ et $\times$ sont ainsi bien définies.

Théorème 22.15

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

Démonstration. Éléments de preuve :

1. On vérifie que $(\mathbb{K}(X), +)$ est un groupe abélien :

(a) $+$ est une l.c.i. associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$.
(b) L'élément neutre pour $+$ est la fraction nulle $F = 0$.
(c) L'opposé (i.e. symétrique pour $+$) de $\frac{A}{B}$ est la fraction $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$, qu'on peut donc aussi noter $-\frac{A}{B}$.

2. On vérifie que $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps :
(a) $\times$ est une l.c.i. associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$, distributive sur $+$.
(b) L'élément neutre pour $\times$ est la fraction $F = 1$ (càd $\frac{1}{1}$, $\frac{X}{X}$, ou encore $\frac{B}{B}$ avec $B \neq 0$).
(c) Si $\frac{A}{B} \neq 0$, alors nécessairement $A \neq 0$ et on vérifie que $\frac{A}{B}$ admet pour inverse $\frac{B}{A} \in \mathbb{K}(X)$. Ainsi tout élément non nul de $\mathbb{K}(X)$ est inversible.

□

3.3 Fractions irréductibles et degré

Définition 22.16 (Fraction irréductible)

Une fraction rationnelle est dite irréductible (ou sous forme irréductible) si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Remarque. Toute fraction $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ peut se réécrire sous forme irréductible en divisant numérateur et dénominateur par $A \wedge B$. En effet pour tout couple (A, B), on a vu qu'il existe $(A_1, B_1) \in \mathbb{K}(X)$ telle que

$$A = (A \wedge B)A_1 \qquad \text{et} \qquad B = (A \wedge B)B_1 \qquad \text{et} \qquad A_1 \wedge B_1 = 1$$

Alors

$$\frac{A}{B} = \frac{(A \wedge B)A_1}{(A \wedge B)B_1} = \frac{A_1}{B_1}$$

et cette dernière fraction est bien irréductible.

Une fraction $\frac{A}{B}$ admet une infinité de formes irréductibles : si $\frac{A_1}{B_1}$ en est une, toutes les autres sont les fractions

Exemple 8. La fraction $\frac{X^3 - 1}{X^4 - 1}$ n'est pas irréductible car 1 est une racine commune. De plus la décomposition en produits de polynômes irréductibles de $X^3 - 1$ et de $X^4 - 1$ donne :

On lit sur cette décomposition que $(X^3 - 1) \wedge (X^4 - 1) = X - 1$. Donc on peut se ramener à une fraction irréductible en simplifiant par le PGCD :

Définition (Degré)

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On définit le degré de F par

$$\deg F := \deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

- Comme $\deg A \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ et $\deg B \in \mathbb{N}$ (car $B \neq 0$), on a bien $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.
- Le degré de F ne dépend pas de son écriture : si on a $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$, alors comme $AD = BC$ on a

$$\deg A + \deg D = \deg B + \deg C$$

  et donc, comme $\deg B, \deg D$ sont finis :

$$\deg A - \deg B = \deg C - \deg D \quad \Longrightarrow \quad \deg\left(\frac{A}{B}\right) = \deg\left(\frac{C}{D}\right)$$

  Ainsi, on peut prendre n'importe quelle écriture pour calculer $\deg F$.
- Attention ! Si $\deg F = 0$, cela n'implique pas que F est égale à un élément $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Contre-exemple : $F = \dfrac{X+5}{2X-3}$.

Exemple 9. Le degré de $\dfrac{1}{X^2}$ est ; Le degré de $\dfrac{(X-1)^2 - X^2}{X(1-X)}$ est

4 Fonctions rationnelles

Définition 22.17 (Racines et pôles)

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ qui admet $\dfrac{A}{B}$ pour forme ***irréductible***.

- On appelle racine de F tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A(\alpha) = 0$, i.e. toute racine de A. On définit la multiplicité de α (en tant que racine de F) comme étant sa multiplicité en tant que racine de A.
- On appelle pôle de F tout élément $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $B(\beta) = 0$, i.e. toute racine de B. On définit la multiplicité de β (en tant que pôle de F) comme étant sa multiplicité en tant que racine de B.

Exemple 10. Si $F = \dfrac{1}{(X-\alpha)^k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors α est un pôle de F de multiplicité k.

Exemple 11. Attention à bien mettre F sous forme irréductible. Si $F = \dfrac{X^3-1}{X^2-1}$, alors 1 n'est ni racine, ni pôle de F. En effet, sous forme irréductible,

$$F = \frac{X^2+X+1}{X+1}$$

si bien que F a pour unique pôle -1, et F n'a pas de racine réelle. Cependant, F admet deux racines complexes : $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et j^2.

Dans la définition qui suit, on note $\widetilde{P}$ la fonction polynômiale associée à un polynôme P.

Définition 22.18 (Fonction rationnelle)

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ qui admet $\dfrac{A}{B}$ pour forme ***irréductible***. On appelle fonction rationnelle (associée à F) la fonction

$$\widetilde{F} : x \mapsto \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)}$$

La fonction $\widetilde{F}$ est définie sur $\mathbb{K} \setminus \widetilde{B}^{-1}(\{0\})$, i.e. sur $\mathbb{K}$ privé des racines de B (i.e. des pôles de F) et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Les deux définitions précédentes ne dépendent pas du choix de la forme irréductible de F (si $F = \dfrac{\lambda A}{\lambda B}$ alors on trouve les mêmes racines, pôles et fonction rationnelle $\widetilde{F}$).
- Cette définition de $\widetilde{F}$ est compatible avec les opérations $+, \lambda\cdot, \times$ de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{K}(X)$:

$$\widetilde{F+G} = \widetilde{F} + \widetilde{G} \qquad \widetilde{F \times G} = \widetilde{F} \times \widetilde{G} \qquad \widetilde{\lambda F} = \lambda \widetilde{F}$$

5 Décomposition en éléments simples (DES)

Pour intégrer l'expression $\dfrac{1}{1-x^2}$, on a vu la méthode suivante : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \qquad \text{donc} \qquad \int_a^b \frac{1}{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2}\ln|1+x| + \frac{1}{2}\ln|1-x|\right]_a^b$$

Le but de cette section (et du chapitre) est de donner une méthode pour décomposer une fraction rationnelle F de $\mathbb{K}(X)$ de la même façon, de sorte qu'on puisse l'étudier plus facilement car elle s'écrit comme une combinaison (linéaire) de fractions plus simples. Ce sera particulièrement utile pour réaliser des opérations linéaires : intégration, sommation, dérivation, etc.

Le calcul de la DES se fait en trois étapes : les étapes 2 et 3 varient selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.1 Début de la méthode ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Définition 22.19 (Étape 1 : partie entière + fraction de degré négatif)

Toute fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ peut se décomposer en

$$\frac{A}{B} = E + \frac{R}{B}$$

avec

- $E \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme appelé partie entière de $\dfrac{A}{B}$.
- $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{K}(X)$ qui vérifie $\deg\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0$.

De plus le couple (E, R) associé à cette décomposition est unique.

Le couple (E,R) s'obtient en faisant la division euclidenne de A par B :

$$\begin{cases} A = BE + R \\ \deg R < \deg B \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{A}{B} = E + \dfrac{R}{B} \\ \deg\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0 \end{cases}$$

A noter : si $\deg\left(\dfrac{A}{B}\right) < 0$, alors la partie entière de $\dfrac{A}{B}$ est nulle et $R = A$. Cette étape n'est alors pas nécessaire.

5.2 Fin de la méthode sur $\mathbb{C}$

On suppose que $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$.

Remarque (Étape 2.$\mathbb{C}$: décomposition de B en produit de polynômes irréductibles). Puisque $B \in \mathbb{C}[X]$ est non nul, B peut se décomposer en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$: il existe

- $n \in \mathbb{N}$,
- $\mu \in \mathbb{C}^*$,
- des complexes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ distincts,
- et des entiers $r_1, \cdots, r_n \geq 1$ tels que

$$B = \mu \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{r_i}$$

On notera que le cas $n = 0$ correspond à $B = \mu$, i.e. B constant non nul.

Théorème 22.20 (Étape 3.$\mathbb{C}$: éléments simples sur $\mathbb{C}$)

Soit $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$ telle que $\deg\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0$. On écrit B en produit de polynômes irréductibles :

$$B = \mu \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{r_i}$$

Alors, il existe des éléments de $\mathbb{C}$ (un pour chaque $\bullet$ ci-dessous) telle que

$$\begin{aligned}
\frac{R}{B} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\bullet}{(X - \alpha_i)^k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\bullet}{X - \alpha_i} + \frac{\bullet}{(X - \alpha_i)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X - \alpha_i)^{r_i}} \right) \\
&= \left(\frac{\bullet}{X - \alpha_1} + \frac{\bullet}{(X - \alpha_1)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X - \alpha_1)^{r_1}} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\bullet}{X - \alpha_2} + \frac{\bullet}{(X - \alpha_2)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X - \alpha_2)^{r_2}} \right) \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad + \left(\frac{\bullet}{X - \alpha_n} + \frac{\bullet}{(X - \alpha_n)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X - \alpha_n)^{r_n}} \right)
\end{aligned}$$

Finalement, on a la décomposition suivante :

Définition 22.21 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Alors F admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(X-\alpha_i)^k}$$

où $E \in \mathbb{C}[X]$ est la partie entière de F, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les pôles distincts de F de multiplicités respectives $r_1, \cdots, r_n \geq 1$ et (c_{ik}) est une famille d'éléments de $\mathbb{C}$.

Cette décomposition est unique : il n'y a qu'une seule famille (c_{ik}) pour laquelle l'égalité est vérifiée.

Exemple 12. Donner la forme des DES suivantes (sans déterminer les complexes • associés) :

- $F = \dfrac{1}{5X^3(2X-4i)} = \ldots$

- $F = \dfrac{X^3 + iX^2}{(X-i)^2(X+1)^2 X} = \ldots$

Si $F = \dfrac{A}{1} \in \mathbb{K}[X]$, alors la décomposition en éléments simples de F est juste $F + 0$: la partie entière est $E = F$ et, puisque $B = 1$ est constant, on a $n = 0$, si bien que la somme double est nulle.

5.3 Fin de la méthode sur $\mathbb{R}$

On suppose que $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{R}(X)$.

Remarque (Étape 2.$\mathbb{R}$: décomposition de B en produit de polynômes irréductibles). Puisque $B \in \mathbb{R}[X]$ est non nul, alors B peut se décomposer en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$: il existe :

- $n, m \in \mathbb{N}$,
- $\mu \in \mathbb{R}^*$,
- des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ distincts,
- des entiers $r_1, \cdots, r_n \geq 1$,
- des polynômes $Q_1, \cdots, Q_m \in \mathbb{R}[X]$ dont le discriminant est strictement négatif
- et des entiers $s_1, \cdots, s_m \geq 1$ tels que

$$B = \mu \left(\prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{r_i} \right) \prod_{j=1}^{m} Q_j^{s_j}$$

Théorème 22.22 (Étape 3.$\mathbb{R}$: éléments simples sur $\mathbb{R}$)

Soit $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle irréductible telle que deg $\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0$. B admet ainsi une décomposition en produit de polynômes irréductibles :

$$B = \mu \left(\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{r_i} \right) \prod_{j=1}^{m} Q_j^{s_j}$$

Alors, il existe des éléments de $\mathbb{R}$ (un pour chaque $\bullet$ ci-dessous) telles que

$$\begin{aligned}
\frac{R}{B} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\bullet}{(X-\alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s_j} \frac{\bullet X + \bullet}{(Q_j)^k} \\
&= \left(\frac{\bullet}{X-\alpha_1} + \frac{\bullet}{(X-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X-\alpha_1)^{r_1}} \right) \\
&\quad \vdots \\
&+ \left(\frac{\bullet}{X-\alpha_n} + \frac{\bullet}{(X-\alpha_n)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X-\alpha_n)^{r_n}} \right) \\
&+ \left(\frac{\bullet X + \bullet}{Q_1} + \frac{\bullet X + \bullet}{Q_1^2} + \ldots + \frac{\bullet X + \bullet}{Q_1^{s_1}} \right) \\
&\quad \vdots \\
&+ \left(\frac{\bullet X + \bullet}{Q_m} + \frac{\bullet X + \bullet}{Q_m^2} + \ldots + \frac{\bullet X + \bullet}{Q_m^{s_m}} \right)
\end{aligned}$$

Finalement, on a la décomposition suivante :

Définition 22.23 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. Alors F admet une <u>décomposition en éléments simples</u> sur $\mathbb{R}$:

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(X-\alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s_j} \frac{a_{jk}X + b_{jk}}{(Q_j)^k}$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ est la partie entière de F, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les pôles réels distincts de F de multiplicités respectives $r_1, \cdots, r_n \geq 1$, $Q_1, \cdots, Q_m$ les polynômes irréductibles de degré 2 distincts qui composent le dénominateur de F, et (c_{ik}), (a_{jk}) et (b_{jk}) des familles de réels.

De plus cette décomposition est unique : il n'y a qu'une seule famille (c_{ik}), une seule famille (a_{jk}) et une seule famille (b_{jk}) pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Exemple 13. Donner la forme des DES suivantes (sans déterminer les réels $\bullet$ associés) :

- $F = \dfrac{1}{(X^2+1)^2 X} = \ldots$

- $F = \dfrac{X^3 + X^2 + X + 1}{(X^2+4)(X-4)^2} = \ldots$

5.4 Le déroulé de chaque étape

Méthode (Décomposition en éléments simples)

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction qu'on veut décomposer en éléments simples.

1. On fait d'abord la division euclidienne de A par B : on obtient alors
$$\frac{A}{B} \quad = \quad E \quad + \quad \frac{R}{B} \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg B$$
On a ainsi déterminé la partie entière E. Dans la suite, on s'intéresse uniquement à $\dfrac{R}{B}$.
2. On décompose B en produit de polynômes irréductibles : la forme peut varier selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. Une fois B décomposé, on connait la forme de la décomposition en éléments simples de F et on détermine les coefficients au numérateur (chaque • dans les propriétés plus haut).

La décomposition en éléments simples de la fraction F est alors
$$\frac{A}{B} \quad = \quad E \quad + \quad \left[\text{"décomposition de } \frac{R}{B} \text{ déterminée à l'étape 3"}\right]$$

Pour l'étape 3, tout se fait **au brouillon** : sur la copie, **on n'écrit que la décomposition finale**. Au brouillon, on écrit la forme de la décomposition avec des inconnues pour chaque coefficient au numérateur à déterminer.

Une fois la forme écrite, on a recours à une ribambelle d'astuces et de techniques : les exemples et les exercices sont le meilleur moyen de les comprendre. Voici un récapitulatif :

Méthode (Déterminer les coefficients à l'étape 3)

- "**Grande puissance**" : pour chaque pôle α, multiplier par $(X-\alpha)^r$ avec r la multiplicité de α, puis remplacer X par α partout.
- "**Passage à la limite**" : multiplier par X et faire tendre X vers $+\infty$ pour en déduire une relation.
- "**Parité**" : si la fraction $G := \dfrac{R}{B}$ est paire, on peut comparer les décompositions de $G(-X)$ et de $G(X)$ et égaliser deux à deux les coefficients qui ont le même dénominateur. Idem si G est impaire en comparant $G(-X)$ et $-G(X)$.
- "**Évaluation**" : on peut évaluer toute l'expression en un point précis de $\mathbb{K}$ et en déduire une relation.
- "**Grande puissance, racine imaginaire**" : pour les termes $\dfrac{aX+b}{Q^s}$ avec Q à discriminant strictement négatif et s la plus grande puissance en Q, on peut multiplier par Q^s partout et prendre $X = \omega \in \mathbb{C}$ une racine complexe de Q. Il n'est pas nécessaire de calculer ω : on peut uniquement utiliser le fait que $Q(\omega) = 0$ pour s'en sortir.
- ...

Remarque. Si α est un pôle simple de B, alors on peut écrire $\dfrac{R}{B} = \dfrac{R}{(X-\alpha)Q}$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. Dans ce cas, la première méthode donne $\dfrac{R}{B} = \dfrac{\lambda}{X-\alpha} + \dots$ avec $\lambda = \dfrac{R(\alpha)}{Q(\alpha)} = \dfrac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}$ car $B'(\alpha) = Q(\alpha)$.

Exemple 14. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F = \frac{A}{B} := \frac{2X^7 + 2X^5 - 10X^3 + 6X + 16}{X^6 + X^4 - 5X^2 + 3}$$

(Étape 1) On remarque que $A = 2XB + 16$. Ainsi,

$$F = 2X + \frac{16}{B}$$

Comme $2X$ est un polynôme et que $\frac{16}{B}$ est de degré strictement négatif, on a terminé l'étape 1. La partie entière est $2X$ (on aurait aussi pu faire une division euclidienne classique). Dans la suite, on ne s'intéresse donc qu'à la fraction $\frac{16}{B}$.

(Étape 2) On factorise $B = X^6 + X^4 - 5X^2 + 3$ en produit de polynômes irréductibles.

(Étape 3) On cherche une décomposition de la fraction $G := \frac{16}{B}$. La forme générale est :

Bonus : argument de parité

- On aurait aussi pu utiliser un argument de parité : on remarque que $G(X) = G(-X)$ donc par unicité ces deux fractions ont nécessairement la même décomposition. Or,

$$\begin{aligned} G(-X) &= \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{d}{(-X+1)^2} + \frac{e(-X)+f}{(-X)^2+3} \\ &= \frac{-a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{-c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{-eX+f}{X^2+3} \end{aligned}$$

  tandis que

$$G(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{eX+f}{X^2+3}$$

  Si on compare les deux écritures, on peut alors identifier les coefficients qui ont le même dénominateur :

$$\begin{cases} a = -c \\ b = d \\ c = -a \\ d = b \\ eX + f = e(-X) + f \end{cases} \qquad \begin{cases} a + c = 0 \\ b = d \\ e = 0 \end{cases}$$

  On obtient ainsi trois équations en un coup.